# Cayley射影平面の局所等長埋め込み (等質空間と部分多様体の幾何学)



阿賀岡, 芳夫; 兼田, 英二

数理解析研究所講究録 1346 巻 2003 年 99-112



# Cayley 射影平面の局所等長埋め込み

広島大・総合科学部　　阿賀岡 芳夫 (Yoshio Agaoka)
Faculty of Integrated Arts and Sciences, Hiroshima University

大阪外語大・外国語学部　　兼田 英二 (Eiji Kaneda)
Faculty of Foreign Studies, Osaka University of Foreign Studies

## § 1. Introduction.

Nash の埋め込み定理によりすべてのリーマン多様体は十分高い次元のユークリッド空間に等長に埋め込めることが知られている．そこで自然な問題として，リーマン多様体が与えられたとき，それを等長に埋め込むことのできる最小次元のユークリッド空間を決定せよ，という問題が考えられる．しかしこのような具体的な問題は意外と (或は当然のことながら?) 難しく，我々が研究を始めた時点においては定曲率空間 $\mathbf{R}^n$, $S^n$, $H^n$ 以外の空間についてはほとんど何も知られていなかった．ここではリーマン多様体として話を対称空間 $M = G/K$ に限定し，$M$ のユークリッド空間への “局所” 等長埋め込みの問題について考えることにする．(大域的な等長埋め込みの可能性について調べることも大切な問題ではあるが．)

$M$ が対称 $R$ 空間の場合，Kobayashi [26] によりユークリッド空間への標準的な等長埋め込みが構成されているが，これは最小次元の等長埋め込みを与えているのだろうか？(多くの場合，$n$ 次元対称 $R$ 空間はおおよそ $2n$ 次元のユークリッド空間に大域的に等長に埋め込まれている．) 我々はリーマン対称空間の局所等長埋め込みの問題について研究を続けてきたが，最近 Cayley 射影平面 $P^2(\mathbf{Cay}) = F_4/Spin(9)$ の場合について rigidity まで込めた最良の結果が得られたので，今回は主にそれについて報告する (定理 4) [14]．ただしこの定理の証明の概略を述べるためには，論文 [9] において導入された曲率から定まる不変量 $p(G/K)$ に関する議論が必要となるので，この報告では準備としてそれらについても説明する．

一般の対称空間については末尾にある表に現時点での結果をまとめておいた．その中で，ユークリッド空間への (局所) 等長埋め込みの最小次元が確定している既約対称空間は以下

の通りである ($\mathbf{R}^n$ は既約ではないがリストに加えた) :

- $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^n$,
- $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$,
- $H^n \subset \mathbf{R}^{2n-1}$,
- [CI] $Sp(n)/U(n) \subset \mathbf{R}^{n(2n+1)}$,
- [$\mathbf{C}_n$] $Sp(n) \subset \mathbf{R}^{4n^2}$,
- [CII] $P^2(\mathbf{H}) \subset \mathbf{R}^{14}$,
- [FII] $P^2(\mathbf{Cay}) \subset \mathbf{R}^{26}$.

この中で, 定曲率空間については先述した通り昔からよく知られていた (或は自明な) 結果である. 残りの空間についてこれから順を追って説明してゆくが, 証明には各空間の個性が反映され, 難しさが段階的に異なる.

**§2. General theory.**

まず一般論から始めよう. $f: M^n \longrightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ を $n$ 次元リーマン多様体の等長埋め込みとする. (後の話の都合上, $r \leq n$ と仮定する. ) するとこの埋め込みより第2基本形式

$$\alpha : T_xM \times T_xM \longrightarrow T_x^{\perp}M$$

が定まる. ここに $T_x^{\perp}M$ は $x \in M$ における法空間. $\alpha$ は対称な双線形写像であり, 次のガウス方程式を満たしている :

$$-g(R(Y,Z)X,W) = \langle \alpha(X,Y), \alpha(Z,W) \rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W) \rangle.$$

ただし $R$ は $M$ の曲率テンソルで, $\langle\ ,\ \rangle$ は $T_x^{\perp}M$ の誘導計量. このとき $X \in T_xM$ に対して線形写像 $\alpha_X : T_xM \longrightarrow T_x^{\perp}M$ を

$$\alpha_X(Y) = \alpha(X,Y)$$

で定める. 上のガウス方程式から明らかなように $Y, Z \in \operatorname{Ker} \alpha_X$ ならば $R(Y,Z)X = 0$ となる. また $\dim T_xM = n$, $\dim T_x^{\perp}M = r$ であるから $\dim \operatorname{Ker} \alpha_X \geq n - r$ となる. ($n \geq r$ と仮定していたことに注意. ) つまり $f: M^n \longrightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ という等長埋め込みが存在すれば, $M$ の各点 $x$ においてある性質を満たす $n-r$ 次元以上の部分空間 $\operatorname{Ker} \alpha_X \subset T_xM$ が各 $X \in T_xM$ に対して定まることになる. この事実を整備すると以下のような主張にまとめられる [9].

$X \in T_xM$ に対して

$$d(X) = \max_W \dim W$$

とおく．ただし $W$ は $R(Y,Z)X=0$, $({}^{\forall}Y,Z\in W)$ という性質を満たす $T_xM$ の部分空間全体を動くものとする．更に $M$ 上の $\mathbf{Z}_+$ 値関数 $p_M(x)$ を

$$p_M(x)=\min_{X\in T_xM} d(X)$$

で定める．$p_M(x)$ は $M$ の曲率だけで定まる intrinsic な量であることに注意する．このとき次の定理が成り立つ

**定理 1** [9]. $M^n$ が $\mathbf{R}^{n+r}$ に等長に埋め込めるなら, $M^n$ の各点 $x$ において不等式

$$r\geq n-p_M(x)$$

が成り立つ．特に $x$ を含む $M^n$ のどのような開部分多様体も余次元が $n-p_M(x)-1$ のユークリッド空間には等長には埋め込めない．

つまりこの定理により $M$ の intrinsic な量でもって $M$ の局所等長埋め込みの不可能性が判定できることになる．($M$ が $\mathbf{R}^n$, $S^n$ ならば $p_M$ の値はそれぞれ $n, n-1$ となり, 自明な結果 $\mathbf{R}^n\not\subset\mathbf{R}^{n-1}$, $S^n\not\subset\mathbf{R}^n$ が得られる．) $M=G/K$ が対称空間であれば $p_M$ は定数関数になるので, 以降この定数値を $p(G/K)$ と表すことにする．

$p(G/K)$ の基本的な性質として次のことが成り立つ [9]：

- $p(M_1\times M_2)=p(M_1)+p(M_2)$,
- $p(M)=p(M^*)$.

ここに $M^*$ は $M$ の双対空間．また $M$ が対称空間の場合, 不変量 $p(G/K)$ は次のようにリー環の言葉で記述できる．$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ を $G$ のリー環 $\mathfrak{g}$ の標準分解, $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{m}$ の極大可換部分代数とし, 更に $\mathfrak{k}_0=\{X\in\mathfrak{k}\mid[X,\mathfrak{a}]=0\}$ とする．すると

$$p(G/K)=\max_{W}\dim W.$$

ここに $W$ は $[W,W]\subset\mathfrak{k}_0$ という性質を満たす $\mathfrak{m}$ の部分空間全体を動くものとする．各対称空間に対して $p(G/K)$ の値を決定するのは基本的な問題であるが, まだ完全な解決には至れていない [9], [10], [12]．しかし $\mathfrak{k}_0=\{0\}$ となる空間 (これは Satake 図形が白丸のみで構成され矢印を含まない空間といってもよいし, また $\operatorname{rank}M=\operatorname{rank}G$ となる空間といってもよい) の場合だと明らかに $p(G/K)=\operatorname{rank}G/K$ となる．特に [**CI**] $Sp(n)/U(n)$ の場合, $\dim M=n(n+1)$, $\operatorname{rank}M=n$ であるから, 余次元が $\dim M-\operatorname{rank}M-1=n^2-1$

のユークリッド空間へは局所的にも等長に埋め込めない．一方 $Sp(n)/U(n)$ の標準埋め込みの余次元は $n^2$ であるから次の定理が得られる．

**定理 2** [9]. $Sp(n)/U(n)$ の場合, Kobayashi の標準埋め込みが局所的にみても最小次元の等長埋め込みを与える．

ほとんど何の考察をすることもなく, $Sp(n)/U(n)$ については最良の結果が得られたことになる．$\mathfrak{k}_0 = \{0\}$ となる空間は他にもあるが, それらの空間については $p(G/K)$ を使うだけでは Kobayashi の埋め込みが最小次元の局所等長埋め込みを与えているか否か判定することができない．

次に $M = Sp(n)$ の場合であるが, これについては多少の議論を重ねることにより $p(Sp(n)) = 2n$ となることが示せる [10]. $\dim M - p(M) - 1 = n(2n+1) - 2n - 1 = 2n^2 - n - 1$ であり, 一方標準埋め込み $Sp(n) \subset \mathbf{R}^{4n^2}$ の余次元は $2n^2 - n$ であるから次の結果が得られる．

**定理 3** [10]. $Sp(n)$ の場合, 標準埋め込みが局所的にみても最小次元の等長埋め込みを与える．

$n = 1$ のときは $Sp(1) = S^3$ であるからこの結果は球面の場合の結果の自然な拡張ともみれる．残りのコンパクト型古典単純リー群 $G$ については, 階数の小さな場合を除いて $p(G)$ の値はまだ確定していないが, 現在次の評価式が得られている [10]：

$$
\begin{array}{lcr}
SU(n) & : & \left[\dfrac{3n}{2}\right] - 1 \leq p(G) \leq 2n - 1, \\
SO(2n+1) & : & 2n \leq p(G) \leq 4n + 1, \\
SO(2n) & : & n + 2\left[\dfrac{n}{2}\right] \leq p(G) \leq 4n - 1.
\end{array}
$$

各不等式の左端の値が $p(G)$ の真の値を与えているであろう, というのが現在の予想である．定理 1 を用いて等長埋め込みの非存在性を示す際, $p(G)$ の真の値より大きな値を使って評価しても数学的には正しいので, 上記不等式の右端の値を用いて不可能性の評価式が得られる．(末尾の表におけるこれらの群に関する評価はこのようにして得られたものである．従って, $p(G)$ の真の値が確定すれば評価が更に改良される可能性がある．しかし $Sp(n)$ の場合と異なり, $p(G)$ を使っただけでは標準埋め込みとの次元差は決して埋められない．) 例外型については §4 (3) を参照．

### §3. Case of $P^2(\mathbf{Cay})$. Main Theorem.

Kobayashi により $P^2(\mathbf{Cay}) = F_4/Spin(9)$ の $\mathbf{R}^{26}$ への大域的な等長埋め込みが構成されている．この節では次の定理の証明のあらましについて述べる．

**定理 4** [13], [14]. (1) $P^2(\mathbf{Cay})$ のどのような開部分多様体も $\mathbf{R}^{25}$ には等長に埋め込めない．

(2) $P^2(\mathbf{Cay})$ の $\mathbf{R}^{26}$ への局所等長埋め込みは剛性をもつ．つまり，$P^2(\mathbf{Cay})$ の連結開部分多様体の $\mathbf{R}^{26}$ への等長埋め込みは Kobayashi による標準埋め込みと ($\mathbf{R}^{26}$ のユークリッド変換を除いて) 一致する．

後述するように，$M = P^2(\mathbf{Cay})$ の場合，$p(M) = 7$ となる．$P^2(\mathbf{Cay})$ は 16 次元であるから定理 1 を用いるだけでは $\mathbf{R}^{24}$ への埋め込み不可能性しか示されない．上記の定理 4 (1) はその評価を 1 次元分改良していることになる．(ここでは詳しく述べないが，$P^2(\mathbf{H}) = Sp(3)/Sp(2) \times Sp(1)$ の場合は $p(P^2(\mathbf{H})) = 3$ となり，定理 1 より $P^2(\mathbf{H}) \not\subset \mathbf{R}^{12}$ が得られる．この場合も $P^2(\mathbf{Cay})$ と同様，更に 1 次元分だけ評価が改良され，局所等長埋め込みに関して最良の結果が得られる [13]．)

証明の基礎となるのは次の 2 つの主張 (定理 5，定理 6) である．前者は一般のリーマン多様体で成立する定理である．

**定理 5** [14]. $f_0 : M^n \longrightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ を連結な $n$ 次元リーマン多様体 $M$ の等長埋め込みとする．もし余次元 $r$ におけるガウス方程式

$$(*) \qquad -g(R(Y,Z)X,W) = \langle \alpha(X,Y), \alpha(Z,W) \rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W) \rangle$$

の解が $M$ の各点において $O(r)$ の作用を除いて一意的であれば，$M$ の任意の等長埋め込み $f : M^n \longrightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ は $f_0$ に congruent.

ここでガウス方程式 $(*)$ の解が $O(r)$ の作用を除いて一意的であるとは次のような意味である：等長埋め込みが存在しているからそれの定める第 2 基本形式は各点ごとにガウス方程式 $(*)$ を満たしている．$(*)$ を未知数 $\alpha$ に関する純粋に代数的な連立 2 次方程式系とみたとき，各点ごとに $O(r)$ の作用を除いて解がその第 2 基本形式に一致するという意味である．連立 2 次方程式系の解の本質的な一意性を仮定しているわけで，これはかなりきつい条件である．同様の剛性定理は他にも様々な version のものが知られているが，このようにガウス方程式の解の一意性から等長埋め込みの一意性が導かれるという形のものはな

かったようである (cf. [16], [17], [18], [25], [27], [32], [36], [37] 等). この定理の証明については [14] を参照.

定理4 (1) は定理4 (2) から簡単に導かれるので, 結局定理4を示すには, $P^2(\mathbf{Cay})$ が定理5の条件を満たしていることをいえばよい. ($P^2(\mathbf{Cay})$ は等質空間であるから, $P^2(\mathbf{Cay})$ のある一点におけるガウス方程式の解の一意性を示せば十分. ) まず記号をいくつか準備する. $\mathfrak{g} = \mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{o}(9)$ をそれぞれ $G = F_4$, $K = Spin(9)$ のリー環とし, また $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ を対称空間 $P^2(\mathbf{Cay})$ の標準分解とする. $\dim \mathfrak{m} = \dim P^2(\mathbf{Cay}) = 16$ となる. $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{m}$ の極大可換部分代数, $\Sigma$ を $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート全体とする. すると $P^2(\mathbf{Cay})$ の場合階数が 1 なので, ある制限ルート $\mu \in \mathfrak{a}$ を用いて

$$\mathfrak{a} = \langle \mu \rangle, \qquad \Sigma = \{\pm\mu,\ \pm 2\mu\} \cong BC_1, \qquad \mathfrak{m} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}(\mu) \oplus \mathfrak{m}(2\mu)$$

と表せる. ただし $\mathfrak{m}(\mu)$, $\mathfrak{m}(2\mu)$ はそれぞれ制限ルート $\mu$, $2\mu$ に対する $\mathfrak{m}$ のルート部分空間 :

$$\mathfrak{m}(\lambda) = \{X \in \mathfrak{m} \mid [H, [H, X]] = -(\lambda, H)^2 X,\ {}^\forall H \in \mathfrak{a}\}, \quad (\lambda = \mu,\ 2\mu).$$

今の場合 $\dim \mathfrak{m}(\mu) = 8$, $\dim \mathfrak{m}(2\mu) = 7$ となる. 同様に $\mathfrak{k}(\mu)$, $\mathfrak{k}(2\mu)$ を

$$\mathfrak{k}(\lambda) = \{X \in \mathfrak{k} \mid [H, [H, X]] = -(\lambda, H)^2 X,\ {}^\forall H \in \mathfrak{a}\}, \quad (\lambda = \mu,\ 2\mu)$$

で定めると直和分解

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{k}(\mu) \oplus \mathfrak{k}(2\mu)$$

が得られる. 今の場合 $\dim \mathfrak{k}(\mu) = 8$, $\dim \mathfrak{k}(2\mu) = 7$, $\mathfrak{k}_0 \cong \mathfrak{o}(7)$ となる. ここで

$$\begin{aligned} &\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_{-1} = \mathfrak{m}(\mu), \quad \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_{-2} = \mathfrak{m}(2\mu), \\ &\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_{-1} = \mathfrak{k}(\mu), \quad \mathfrak{k}_2 = \mathfrak{k}_{-2} = \mathfrak{k}(2\mu), \\ &\mathfrak{m}_i = \mathfrak{k}_i = 0 \quad |i| > 2 \end{aligned}$$

とおけば

$$[\mathfrak{k}_i, \mathfrak{k}_j] \subset \mathfrak{k}_{i+j} + \mathfrak{k}_{i-j}, \quad [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] \subset \mathfrak{k}_{i+j} + \mathfrak{k}_{i-j}, \quad [\mathfrak{k}_i, \mathfrak{m}_j] \subset \mathfrak{m}_{i+j} + \mathfrak{m}_{i-j}$$

が成立する. 特に $[\mathfrak{m}(2\mu), \mathfrak{m}(2\mu)] \subset \mathfrak{k}_0$ となる. また $\mathfrak{m}$ の部分空間 $W$ が $[W, W] \subset \mathfrak{k}_0$ 及び $\dim W \geq 3$ の2条件を満たせば $W \subset \mathfrak{m}(2\mu)$ となることが示せるので, この事実より $p(P^2(\mathbf{Cay})) = \dim \mathfrak{m}(2\mu) = 7$ となる. このとき次の定理が成立する.

**定理 6** [14]. $\alpha : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \longrightarrow \mathbf{R}^{10}$ を $P^2(\mathbf{Cay})$ の余次元 10 におけるガウス方程式の解とする．このとき次の式が成り立つようなベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{10}$ が存在する：

$$\begin{aligned}
&\alpha(X, X') = (X, X')\mathbf{A}, \quad {}^{\forall}X, X' \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}(2\mu),\\
&\alpha(Y, Y') = (Y, Y')\mathbf{B}, \quad {}^{\forall}Y, Y' \in \mathfrak{m}(\mu),\\
&\alpha(X, Y) = -\frac{1}{||\mu||^4}\,\alpha(\mu, [[\mu, Y], X]), \qquad {}^{\forall}X \in \mathfrak{m}(2\mu), \quad {}^{\forall}Y \in \mathfrak{m}(\mu),\\
&\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle \oplus \alpha(\mu, \mathfrak{m}(\mu)) = \mathbf{R}^{10} \quad (\text{直交直和}),\\
&||\mathbf{A}|| = ||\mathbf{B}|| = 2||\mu||, \quad \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = 2||\mu||^2,\\
&\langle \alpha(\mu, Y), \alpha(\mu, Y') \rangle = ||\mu||^4 (Y, Y'), \quad Y, Y' \in \mathfrak{m}(\mu).
\end{aligned}$$

ここに ( , ) は $\mathfrak{m}$ の内積．上から 3 番目の式において $[[\mu, Y], X] \in \mathfrak{m}(\mu)$ であるから，$\alpha(\mathfrak{m}(2\mu), \mathfrak{m}(\mu))$ の部分は $\alpha(\mu, \mathfrak{m}(\mu))$ の値で完全に決定される．$\mathbf{R}^{10}$ の基底として，$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 及び $\alpha(\mu, \mathfrak{m}(\mu))$ の基底 8 個をとれば，これらのベクトルの大きさ・角度は下 3 つの式より定まり，従って $O(10)$ の作用を除いて余次元 10 におけるガウス方程式の解の一意性が示されたことになる．

以下，この定理の証明の概略を述べる．$\alpha$ を $P^2(\mathbf{Cay})$ の余次元 10 におけるガウス方程式の解とする．§2 において線形写像 $\alpha_X : \mathfrak{m} \longrightarrow \mathbf{R}^{10}$ $(X \in \mathfrak{m})$ を定義したが，$X = \mu$ のとき，$\alpha_\mu$ は上への写像とはならないことが示せる．つまり $\dim \operatorname{Ker} \alpha_\mu \geq 7$.（この事実は背理法で示すのだが，入れ子状になったかなり手のこんだ議論をする必要がある．）一方ガウス方程式より

$$[[\operatorname{Ker} \alpha_\mu, \operatorname{Ker} \alpha_\mu], \mu] = 0$$

が得られ，これより $[\operatorname{Ker} \alpha_\mu, \operatorname{Ker} \alpha_\mu] \subset \mathfrak{k}_0$ が導かれる．$p(P^2(\mathbf{Cay})) = 7$ であったから，これらの事実より $\operatorname{Ker} \alpha_\mu = \mathfrak{m}(2\mu)$ が得られる．$P^2(\mathbf{Cay})$ は階数が 1 の対称空間であるから，これより ${}^{\forall}X \in \mathfrak{m}$ に対する $\operatorname{Ker} \alpha_X$ の形が以下のような形に定まる：

$$\begin{aligned}
&X \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}(2\mu) \quad \text{のとき} \qquad \operatorname{Ker} \alpha_X = \{Y \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}(2\mu) \mid (X, Y) = 0\},\\
&X \in \mathfrak{m}(\mu) \quad \text{のとき} \qquad \operatorname{Ker} \alpha_X = \{Y \in \mathfrak{m}(\mu) \mid (X, Y) = 0\}.
\end{aligned}$$

このことより

$$\alpha(X, X') = (X, X')\mathbf{A}, \qquad X, X' \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}(2\mu),$$
$$\alpha(Y, Y') = (Y, Y')\mathbf{B}, \qquad Y, Y' \in \mathfrak{m}(\mu)$$

となる $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{10}$ の存在することが示せる．またガウス方程式

$$-g(R(Y, Z)X, W) = \langle \alpha(X, Y), \alpha(Z, W) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle$$

において，もし左辺の曲率の部分が 0 で，更に例えば $\alpha(X, Y) = 0$ であれば直交性 $\alpha(X, Z) \perp \alpha(Y, W)$ がこの式より導かれる．このような事実を積み重ねることにより法空間 $\mathbf{R}^{10}$ の基底が標準的に決定でき，最終的に余次元 $= 10$ におけるガウス方程式の解の一意性 (定理 6 ) が示される．(証明の細部については [14] を参照．http://www.mis.hiroshima-u.ac.jp から入手できます．)

一般にガウス方程式は連立の 2 次方程式系であるから，その解を決定するのは“非線形代数”に属する話である．しかし $P^2(\mathbf{Cay})$ の余次元 $= 10$ の場合は，辛うじて“線形代数”(+ 表現論) での処理が可能であった．ルート分解とガウス方程式の歯車が調子よくかみあう相性のよい空間といってよい．後述するように，複素射影平面 $P^2(\mathbf{C})$ の場合だとこのようなわけにはゆかず，同じ等長埋め込みの問題であっても空間の個性により取り扱い方が異ならざるを得ない．

## §4. Miscellany.

（1） $P^2(\mathbf{Cay})$ の場合，余次元 $= 10$ でのガウス方程式の解の一意性から等長埋め込みの剛性を示したが，現在ガウス方程式の解の一意性が示されている空間には次のようなものがある：

- $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1} \quad (n \geq 3)$, • $Sp(2) \subset \mathbf{R}^{16}$,
- $M^n \subset \mathbf{R}^{n+r}$ で type 数 $\geq 3$ のもの (従って $r \leq \frac{1}{3}n$),
- $P^2(\mathbf{Cay}) \subset \mathbf{R}^{26}$.

これ以外にも $P^2(\mathbf{H})$ や $Sp(n)$ の標準埋め込みについても同様に剛性が成り立つものと予想されるが，証明は $P^2(\mathbf{Cay})$ のときに比べ数段難しくなるようである．($P^2(\mathbf{R})$, $P^2(\mathbf{C})$,

$P^2(\mathbf{H})$, $P^2(\mathbf{Cay})$ と射影平面を順に並べると, 後者になる程代数的な構造が堅固になり, それが局所等長埋め込みの剛性にも反映されるようである. )

（2） 現時点において知られている局所等長埋め込みの可能・不可能な次元の一覧を末尾に表の形にまとめておいた. 例外型の空間の中で対称 $R$ 空間でないものについては, $\mathfrak{g}$ の class one の表現で最小次数となるものの値が記されている. それ以外の埋め込み可能な次元の値はすべて Kobayashi の埋め込み [26] から得られるものである. (現在のところ, Kobayashi の埋め込みより低次元の (局所) 等長埋め込みの例は 1 つも知られていないようである. 結局のところ一般的には Kobayashi の埋め込みが最小次元の等長埋め込みを与えているようにも思われるが, いくつかの空間についてはより低い次元の埋め込みの存在する可能性も否定できない. ) 欄の中で ? となっているものは, $1/2 \cdot n(n+1)$ より小さな次元のユークリッド空間への等長埋め込みの例が知られていないことを示す. また $H^n$ 以外の非コンパクト双対空間の等長埋め込みの具体的な例についても知られていないようである.

（3） 不変量 $p(G/K)$ について, 値が確定しているものを表の形にまとめておく. まずリー群でないものについて：

| | $M$ | $p(M)$ |
|---|---|---|
| $AI$ | $SU(n)/SO(n)$ | $n-1$ |
| $AIII$ | $SU(p+1)/S(U(p)\times U(1))$ | $\begin{cases} 1 & (p=1) \\ 2 & (p=2) \\ p-1 & (p\geq 3) \end{cases}$ |
| | $SU(p+2)/S(U(p)\times U(2))$ | $\begin{cases} 3 & (p=2,3) \\ 4 & (p=4) \\ p-1 & (p\geq 5) \end{cases}$ |
| $BDI, II$ | $SO(p+q)/SO(p)\times SO(q)$ | $\begin{cases} p & (p=q) \\ p-1 & (p\geq q+1) \end{cases}$ |
| $CI$ | $Sp(n)/U(n)$ | $n$ |
| $CII$ | $Sp(p+1)/Sp(p)\times Sp(1)$ | $\begin{cases} 3 & (1\leq p\leq 4) \\ p-1 & (p\geq 5) \end{cases}$ |
| | $Sp(p+2)/Sp(p)\times Sp(2)$ | $\begin{cases} 6 & (2\leq p\leq 5) \\ p+1 & (p\geq 6) \end{cases}$ |
| $EI$ | $E_6/Sp(4)$ | 6 |
| $EV$ | $E_7/SU(8)$ | 7 |
| $EVIII$ | $E_8/Spin(16)$ | 8 |
| $FI$ | $F_4/Sp(3)\cdot SU(2)$ | 4 |
| $FII$ | $F_4/Spin(9)$ | 7 |
| $G$ | $G_2/SO(4)$ | 2 |

これ以外の空間については [12] を参照. [12] においては $p(G/K)$ の下からの評価式が与

えられており, 多くの場合これが真の $p(G/K)$ の値を与えているであろう, というのが現在の予想である.

リー群 $G$ の場合で $p(G)$ の値が確定しているものは次の通り：

| $G$ | $p(G)$ |
|---|---|
| $Sp(n)$ | $2n$ |
| $SU(2) \simeq SO(3) \simeq Sp(1)$ | 2 |
| $SU(3)$ | 3 |
| $SU(4) \simeq SO(6)$ | 5 |
| $SU(5)$ | 6 |
| $SO(5) \simeq Sp(2)$ | 4 |
| $SO(7)$ | 6 |
| $SO(8)$ | 8 |
| $SO(9)$ | 8 |
| $G_2$ | 4 |

各コンパクト単純 Lie 群に対し整数 $s(G)$ を

$$s(G) = \begin{cases} \operatorname{rank} G & G \neq SU(n), SO(2n), E_6, \\ \left[\frac{1}{2}n\right] & SU(n), \\ 2\left[\frac{1}{2}n\right] & SO(2n), \\ 4 & E_6 \end{cases}$$

で定めると、一般に不等式 $p(G) \geq \operatorname{rank} G + s(G)$ が成り立つ [9]. 実際にはすべてのコンパクト単純 Lie 群に対して等式 $p(G) = \operatorname{rank} G + s(G)$ が成立すると予想される.

（4） 幾何学の問題から離れ, “ガウス方程式が解を持つ最小余次元を決定せよ”という代数的な問題に話を移すなら, 例えば $P^2(\mathbf{C})$ の場合だと余次元 $= 3$ が最小となることがわかっている [2]. ($P^2(\mathbf{C})$ は余次元 $= 4$ のユークリッド空間に大域的に等長に埋め込め, また余次元 $= 2$ へは局所的にも埋め込めないことが示されている [2], [39]. ) はたして $P^2(\mathbf{C})$ は $\mathbf{R}^7$ に局所的に等長に埋め込めるのであろうか? この場合, 余次元 $= 3$ におけるガウス方程式の解に一意性はなく, 解全体は 10 次元の variety となる. 従って微分方程式の立場からの考察が必要になる [23]. 対称空間の等長埋め込みの問題に関しては, ガウス方程式に関わる代数的な議論だけで決着のつくものと, 微分方程式の議論を必要とするものとに大別されることになる.

一般の $P^n(\mathbf{C})$ の場合, 末尾の表にもあるように $\mathbf{R}^{n(n+2)}$ には埋め込めるが $\mathbf{R}^{[16n/5]-1}$ には埋め込めない [3]. しかしこの次元の gap は大きく, この穴を埋める何等かの方法を新たに開発する必要がある.

$M^5 = SU(3)/SO(3)$ の場合は $\not\subset \mathbf{R}^7$ および $\subset \mathbf{R}^{12}$ がわかっているが, 更に余次元 $= 5$ でガウス方程式が解を持つことも知られている [4]. では $SU(3)/SO(3)$ は $\mathbf{R}^{10}$ に局所的に等長に埋め込めるか?

“局所的に等長埋め込み可能な最小次元”と“ガウス方程式が解を持つ最小次元”とは一般に異なる可能性がある. しかし, いずれの値もリー環 $\mathfrak{g}$, 或は対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ の何等かの表現論的な意味をもつ量のはずである. 一体それは何なのか?現時点では残念ながら予想すらたてられない.

## 参考文献


[1] Y. Agaoka, *Isometric immersions of* $SO(5)$, J. Math. Kyoto Univ. **24** (1984), 713–724.

[2] Y. Agaoka, *On the curvature of Riemannian submanifolds of codimension* 2, Hokkaido Math. J. **14** (1985), 107–135.

[3] Y. Agaoka, *A note on local isometric imbeddings of complex projective spaces*, J. Math. Kyoto Univ. **27** (1987), 501–505.

[4] Y. Agaoka, *Solutions and almost solutions of the Gauss equation of* $SU(3)/SO(3)$, Mem. Fac. Integrated Arts Sci., Hiroshima Univ. Ser. IV **25** (1999), 1–10.

[5] Y. Agaoka, *On the Gauss equation in the exterior algebra*, Mem. Fac. Integrated Arts Sci., Hiroshima Univ. Ser. IV **26** (2000), 95–108.

[6] 阿賀岡 芳夫, 対称空間の局所等長埋め込み —— Gauss 方程式の現在と展望 ——, 日本数学会幾何学分科会アブストラクト (於慶応義塾大学) 2001 年 3 月, 3–18.

[7] 阿賀岡 芳夫・兼田 英二, リーマン対称空間の局所等長及び共形うめこみについて, 数理解析研究所講究録 **489** (1983), 97–116.

[8] Y. Agaoka and E. Kaneda, *On local isometric immersions of Riemannian symmetric spaces*, Tôhoku Math. J. **36** (1984), 107–140.

[9] Y. Agaoka and E. Kaneda, *An estimate on the codimension of local isometric imbeddings of compact Lie groups*, Hiroshima Math. J. **24** (1994), 77–110.

[10] Y. Agaoka and E. Kaneda, *Local isometric imbeddings of symplectic groups*, Geom. Dedicata **71** (1998), 75–82.

[11] Y. Agaoka and E. Kaneda, *Strongly orthogonal subsets in root systems*, Hokkaido Math. J. **31** (2002), 107–136.

[12] Y. Agaoka and E. Kaneda, *A lower bound for the curvature invariant* $p(G/K)$ *associated with a Riemannian symmetric space* $G/K$, to appear in Hokkaido Math. J.

[13] Y. Agaoka and E. Kaneda, *Local isometric imbeddings of* $P^2(\mathbf{H})$ *and* $P^2(\mathbf{Cay})$, to appear in Hokkaido Math. J.

[14] Y. Agaoka and E. Kaneda, *Rigidity of the canonical isometric imbedding of the Cayley projective plane* $P^2(\mathbf{Cay})$, preprint.
[15] Y. Agaoka and E. Kaneda, *Local isometric imbeddings of Grassmann manifolds*, in preparation.
[16] C. B. Allendoerfer, *Rigidity for spaces of class greater than one*, Amer. J. Math. **61** (1939), 633–644.
[17] E. Berger, R. Bryant and P. Griffiths, *The Gauss equations and rigidity of isometric embeddings*, Duke Math. J. **50** (1983), 803–892.
[18] R. L. Bishop and R. J. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, Academin Press, New York, (1964).
[19] E. Cartan, *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien*, Ann. Soc. Pol. Math. **6** (1927), 1–7.
[20] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1978.
[21] E. Kaneda, *On local isometric immersions of the spaces of negative constant curvature into the euclidean spaces*, J. Math. Kyoto Univ. **19** (1979), 269–284.
[22] E. Kaneda, *Global rigidity of compact classical Lie groups*, Hokkaido Math. J. **14** (1985), 365–397.
[23] E. Kaneda, *On the Gauss-Codazzi equations*, Hokkaido Math. J. **19** (1990), 189–213.
[24] E. Kaneda, *Types of the canonical isometric imbeddings of symmetric R-spaces*, Hokkaido Math. J. **22** (1993), 35–61.
[25] E. Kaneda and N. Tanaka, *Rigidity for isometric imbeddings*, J. Math. Kyoto Univ. **18** (1978), 1–70.
[26] S. Kobayashi, *Isometric imbeddings of compact symmetric spaces*, Tôhoku Math. J. **20** (1968), 21–25.
[27] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry II*, John Wiley & Sons, New York, 1969.
[28] A. Lichnerowicz, *Géométrie des Groupes de Transformations*, Dunod, Paris, 1958.
[29] M. Matsumoto, *Riemann spaces of class two and their algebraic characterization. Part I, II, III*, J. Math. Soc. Japan **2** (1950), 67–76, 77–86, 87–92.
[30] M. Matsumoto, *Local imbedding of Riemann spaces*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser.A **28** (1953), 179–207.
[31] 松本 誠, Riemann 空間の局所的 imbedding について I, II, 数学 **5** (1953), 210–219; **6** (1954), 6–16.
[32] K. Nomizu, *Uniqueness of the normal connections and congruence of isometric immersions*, Tôhoku Math. J. **28** (1976), 613–617.
[33] T. Ôtsuki, *Isometric imbedding of Riemann manifolds in a Riemann manifold*, J. Math. Soc. Japan **6** (1954), 221–234.
[34] H. J. Rivertz, *On Isometric and Conformal Immersions into Riemannian Manifolds*, Thesis, Univ. Oslo, Dept. of Math. (1999), pp.1–147.
[35] R. H. Szczarba, *On existence and rigidity of isometric immersions*, Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 783–787.
[36] R. H. Szczarba, *On isometric immersions of Riemannian manifolds in Euclidean space*, Bol. Soc. Brasil. Mat. **1** No.2 (1970), 31–45.
[37] N. Tanaka, *Rigidity for elliptic isometric imbeddings*, Nagoya Math. J. **51** (1973), 137–160.
[38] T. Y. Thomas, *Riemann spaces of class one and their characterization*, Acta Math. **67** (1935), 169–211.
[39] A. Weinstein, *Positively curved n-manifolds in* $\mathbf{R}^{n+2}$, J. Diff. Geom. **4** (1970), 1–4.

表： 対称空間の局所等長埋め込み

| | $M$ | $\dim M$ | $M \not\subset \mathbf{R}^N$ | $M \subset \mathbf{R}^N$ |
|---|---|---|---|---|
| $AI$ | $SU(n)/SO(n) \quad (n \geq 3)$ | $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ | $n^2-2$ | $n(n+1)$ |
| $AII$ | $SU(2n)/Sp(n) \quad (n \geq 3)$ | $(n-1)(2n+1)$ | $3n^2-2n-2$ | $2n(2n-1)$ |
| $AIII$ | $P^2(\mathbf{C})$ | $4$ | $6$ | $8$ |
| | $P^3(\mathbf{C})$ | $6$ | $9$ | $15$ |
| | $P^4(\mathbf{C})$ | $8$ | $12$ | $24$ |
| | $P^n(\mathbf{C}) \quad (n \geq 5)$ | $2n$ | $[\frac{16}{5}n]-1$ | $n(n+2)$ |
| | $SU(p+2)/S(U(p)\times U(2))$ $(p \geq 2)$ | $4p$ | $\begin{cases} 12 \ (p=2) \\ 20 \ (p=3) \\ 27 \ (p=4) \\ 7p \ (p \geq 5) \end{cases}$ | $(p+1)(p+3)$ |
| | $SU(p+q)/S(U(p)\times U(q))$ $(p \geq q \geq 3)$ | $2pq$ | $\begin{cases} 4pq-2q-1 \\ \quad (p=q, q+1) \\ 4pq-p-q+1 \\ \quad (p \geq q+2) \end{cases}$ | $(p+q)^2-1$ |
| $BDI$ | $*Q^3(\mathbf{C}) \simeq Sp(2)/U(2)$ | $6$ | $9$ | $10$ |
| | $Q^n(\mathbf{C}) \quad (n \geq 4)$ | $2n$ | $[\frac{1}{5}(16n-3)]$ | $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ |
| | $SO(p+q)/SO(p)\times SO(q)$ $(p \geq q \geq 3)$ | $pq$ | $\begin{cases} 2p^2-p-1 \\ \quad (p=q) \\ 2pq-p \\ \quad (p \geq q+1) \end{cases}$ | $\frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)-1$ |
| $BDII$ | $*S^n \quad (n \geq 2)$ | $n$ | $n$ | $n+1$ |
| | $*H^n \quad (n \geq 2)$ | $n$ | $2n-2$ | $2n-1$ |
| $CI$ | $*Sp(n)/U(n) \quad (n \geq 1)$ | $n(n+1)$ | $2n^2+n-1$ | $n(2n+1)$ |
| $CII$ | $*Sp(3)/Sp(2)\times Sp(1)$ | $8$ | $13$ | $14$ |
| | $Sp(p+1)/Sp(p)\times Sp(1)$ $(p \geq 3)$ | $4p$ | $\begin{cases} 8p-4 \\ \quad (3 \leq p \leq 4) \\ 7p \quad (p \geq 5) \end{cases}$ | $p(2p+3)$ |
| | $Sp(p+2)/Sp(p)\times Sp(2)$ $(p \geq 2)$ | $8p$ | $\begin{cases} 16p-7 \\ \quad (2 \leq p \leq 5) \\ 15p-2 \\ \quad (p \geq 6) \end{cases}$ | $(p+1)(2p+5)$ |
| | $Sp(p+q)/Sp(p)\times Sp(q)$ $(p \geq q \geq 3)$ | $4pq$ | $\begin{cases} 8pq-4q-1 \\ \quad (q \leq p \leq q+3) \\ 8pq-p-3q+3 \\ \quad (p \geq q+4) \end{cases}$ | $2(p+q)^2-(p+q)-1$ |
| $DIII$ | $SO(8)/U(4) \simeq Q^6(\mathbf{C})$ | $12$ | $18$ | $28$ |
| | $SO(2n)/U(n) \quad (n \geq 5)$ | $n(n-1)$ | $\frac{3}{2}n(n-1)-1$ | $n(2n-1)$ |

表 (続)： 対称空間の局所等長埋め込み

| | $M$ | $\dim M$ | $M \not\subset \mathbf{R}^N$ | $M \subset \mathbf{R}^N$ |
|---|---|---|---|---|
| $EI$ | $E_6/Sp(4)$ | 42 | 77 | 702 |
| $EII$ | $E_6/SU(2)\cdot SU(6)$ | 40 | 59 | 650 |
| $EIII$ | $E_6/Spin(10)\cdot SO(2)$ | 32 | 47 | 78 |
| $EIV$ | $E_6/F_4$ | 26 | 37 | 54 |
| $EV$ | $E_7/SU(8)$ | 70 | 132 | 1463 |
| $EVI$ | $E_7/Spin(12)\cdot SU(2)$ | 64 | 95 | 1539 |
| $EVII$ | $E_7/E_6\cdot SO(2)$ | 54 | 80 | 133 |
| $EVIII$ | $E_8/Spin(16)$ | 128 | 247 | ? |
| $EIX$ | $E_8/E_7\cdot SU(2)$ | 112 | 167 | 3875 |
| $FI$ | $F_4/Sp(3)\cdot SU(2)$ | 28 | 51 | 324 |
| $FII$ | $*F_4/Spin(9)$ | 16 | 25 | 26 |
| $G$ | $G_2/SO(4)$ | 8 | 13 | 27 |
| $[A_{n-1}]$ | $SU(n)$ $(n \geq 6)$ | $n^2-1$ | $2n^2-2n-2$ | $2n^2$ |
| $[B_n]$ | $SO(2n+1)$ $(n \geq 5)$ | $n(2n+1)$ | $4n^2-2n-2$ | $(2n+1)^2$ |
| $[C_n]$ | $*Sp(n)$ $(n \geq 1)$ | $n(2n+1)$ | $4n^2-1$ | $4n^2$ |
| $[D_n]$ | $SO(2n)$ $(n \geq 5)$ | $n(2n-1)$ | $4n^2-6n$ | $4n^2$ |
| | $SU(3)$ | 8 | 12 | 18 |
| | $SU(4) \simeq SO(6)$ | 15 | 24 | 32 |
| | $SU(5)$ | 24 | 41 | 50 |
| | $*SO(5) \simeq Sp(2)$ | 10 | 15 | 16 |
| | $SO(5,\mathbf{C})/SO(5)$ | 10 | 16 | ? |
| | $SO(7)$ | 21 | 35 | 49 |
| | $SO(8)$ | 28 | 47 | 64 |
| | $SO(9)$ | 36 | 63 | 81 |
| | $E_6$ | 78 | 139 | 1458 |
| | $E_7$ | 133 | 238 | 3136 |
| | $E_8$ | 248 | 459 | ? |
| | $F_4$ | 52 | 94 | 676 |
| | $G_2$ | 14 | 23 | 49 |

$\simeq$ は対称空間の局所同型を表す.

$M$ の前の $*$ 印は局所等長埋め込みの最小次元が確定していることを示す.

この表には縦の欄が5つあるが, 本来は4つあれば十分. そのような表を完成させたい.